1 - CHAMP D'APPLICATION

La grandeur appelée moment d'inertie est utilisée dans deux cas principalement :

- L'application du P.F.D. sur un solide en rotation.
- Le calcul de l'énergie cinétique d'un solide en rotation.

2 - MISE EN ÉVIDENCE DE L'EFFET DU MOMENT D'INERTIE

Soit un **mobile** en liaison pivot avec un **support** fixe. Deux masselottes de masse M sont disposées de part et d'autre du mobile à la distance r de l'axe de rotation au centre de la poulie.

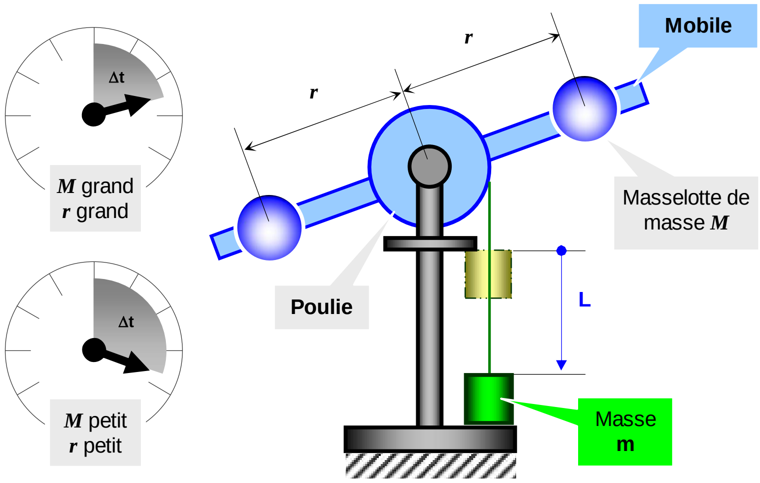
On suspend une masse m à un câble lui même relié à la poulie du mobile.

Le dispositif est abandonné à lui-même. On constate que la masse m suspendue descend, entrainant ainsi en rotation le mobile.

On constate enfin qu'en changeant la distance r et / ou les masses M, la mise en mouvement est plus ou moins rapide - plus r et / ou M sont grands, plus la mise en mouvement est lente.

> Les masses m et leur position r ont donc une influence sur la dynamique du système

Maquette de mise en évidence du momet d'inertie



3 – DÉFINITION GÉNERALE

Si on considère un solide {S} :
⇨ de centre d'inertie G,
⇨ de masse m,
⇨ de volume V,

Sont rassemblés dans une matrice d'inertie $\overline{\overline{I_G}}$, en tout 9 moments d'inertie possibles pour ce solide ; noté L_{Gxx} ; L_{Gyy} ; L_{Gxy} ; etc. ou bien J_{Gx} ; J_{Gy} ...

$$\overline{\overline{I_G}} = \begin{bmatrix} \boxed{L_{Gxx}} & L_{Gxy} & L_{Gxz} \\ L_{Gyx} & \boxed{L_{Gyy}} & L_{Gyz} \\ L_{Gzx} & L_{Gzy} & \boxed{L_{Gzz}} \end{bmatrix}$$

Ils caractérisent la distribution de la matière du solide étudié par rapport à un ou plusieurs axes de rotation et jouent en quelque sorte un rôle similaire à la masse pour un mouvement de translation.

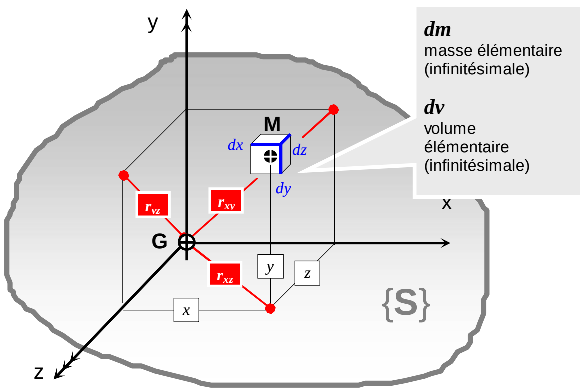
Pour une unique rotation autour des axes x, y ou z (les cas les plus courants), le moment d'inertie se définit :

$$L_{Gxx} = \int_V r_{yz}^2 \, . \, dm \qquad L_{Gyy} = \int_V r_{xz}^2 \, . \, dm \qquad L_{Gzz} = \int_V r_{xy}^2 \, . \, dm$$

Avec

$$r_{yz}^2 = y^2 + z^2 \qquad dm = \rho \, . \, dv$$
$$r_{xz}^2 = x^2 + z^2 \qquad = \rho \, . \, dx \, . \, dy \, . \, dz$$
$$r_{xy}^2 = x^2 + y^2$$

Paramétrage pour le calcul du moment d'inertie



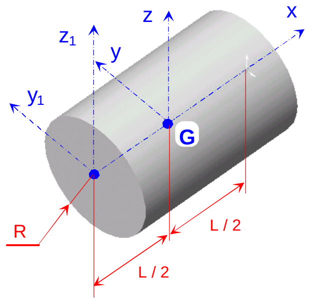
Avec :

$L_{G......}$:	Moment d'inertie par rapport à un ou plusieurs axes ($kg \, . \, m^2$)
ρ :	Masse volumique du solide { **S** } ($kg \, . \, m^{-3}$)
$r_{...}$:	Décalage par rapport à l'axe désigné (m)
x, y, z :	Position / à G, de la masse élémentaire dm (m)
dx, dy, dz :	Dimensions élementaires de la masse élémentaire dm (m)

4 – DÉFINITIONS PARTICULIERES

Moments d'inertie pour des volumes courants

Cylindre plein



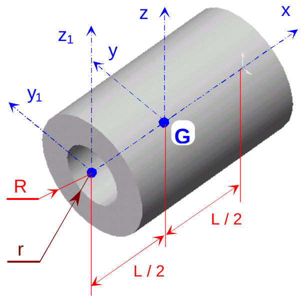
Formules les plus courantes à connaître

$$\boxed{Jx = \frac{m\,R^2}{2}}$$

$$Jy = Jz = \frac{m\,R^2}{4} + \frac{m\,L^2}{12}$$

$$Jy_1 = Jz_1 = \frac{m\,R^2}{4} + \frac{m\,L^2}{3}$$

Cylindre creux

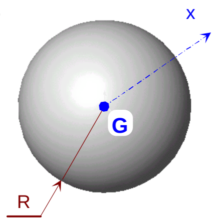


$$\boxed{Jx = \frac{m\,(R^2 + r^2)}{2}}$$

$$Jy = Jz = \frac{m\,(R^2 + r^2)}{4} + \frac{m\,L^2}{12}$$

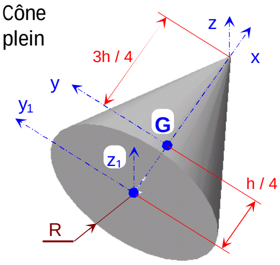
$$Jy_1 = Jz_1 = \frac{m\,(R^2 + r^2)}{4} + \frac{m\,L^2}{3}$$

Sphère



$$Jx = Jy = Jz = \frac{2}{5}\,mR^2$$

Cône plein

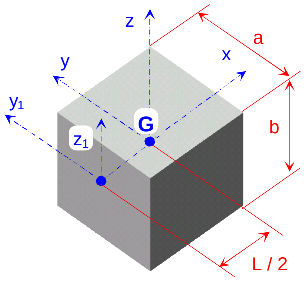


$$Jx = \frac{3mR^2}{10}$$

$$Jy = Jz = \frac{3mR^2}{20} + \frac{3mH^2}{5}$$

$$Jy_1 = Jz_1 = \frac{3mR^2}{20} + \frac{3mH^2}{10}$$

Parallélépipède rectangle



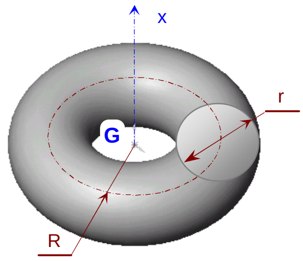
$$\boxed{Jx = \frac{m}{12}(a^2+b^2)}$$

$$Jy = \frac{m}{12}(b^2+L^2)$$

$$Jz = \frac{m}{12}(a^2+L^2)$$

$$Jy_1 = \frac{mb^2}{12} + \frac{mL^2}{3}$$

Tore



$$Jx = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$$

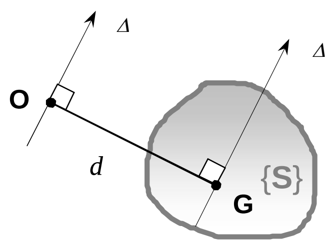
5 – THÉOREME DE HUYGENS

Huygens établit le moment d'inertie par rapport à un axe (O,Δ) à partir du moment d'inertie par rapport à l'axe (G,Δ), de la masse **m** concentrée d'un solide { **S** } décalée et de la distance ***d*** séparant (G,Δ) et (O,Δ) (voir figure 4) :

Moment d'inertie / axe (O, Δ) :

$$L_{O\Delta} = L_{G\Delta} + m\,.\,d^2$$

$(kg\,.\,m^2)$ $(kg\,.\,m^2)$ (kg) (m)



Christian Huygens
(1629 – 1695)

Protocole de calculs pour un solide de forme complexe

En l'absence de modeleur permettant d'accéder à la matrice d'inertie…

❶ Décomposer le volume du solide complexe en plusieurs volumes simples. Procéder par addition ou soustraction selon les cas.

❷ Positionner les centres de gravité de chaque volume simple.
Déterminer les distances les séparant de l'axe considéré passant par le centre de gravité du solide complexe.

❸ Déterminer le moment d'inertie de chaque volume simple par rapport à l'axe considéré passant par le centre de gravité de chacun d'eux.

❹ Déterminer par le théorème de Huygens, les moments d'inertie de chaque volume simple, par rapport à l'axe considéré et passant par le centre de gravité du solide complexe.

❺ Déterminer le moment d'inertie du solide complexe en effectuant la somme et / ou la différence de moments élémentaires selon les choix opérés en ❶.